

ESCALA DE INSTRUCCIÓN EN CÁLCULO ARITMÉTICO

Por AGUSTÍN SAURAS ALCAINE

1. INSTRUCCIÓN EN CÁLCULO ARITMÉTICO

Hablar de cálculo aritmético es presentar una parte de todo el complejo aritmético. Efectivamente, hemos de distinguir:

1. Los conocimientos aritméticos sobre la naturaleza, cualidades, relaciones, etc., del ente aritmético. Estos conocimientos pueden ser puramente teóricos, especulativos, considerados con independencia de toda aplicación práctica o pueden ser prácticos.

2. El cálculo aritmético consiste en hallar unos números desconocidos, supuestos otros conocidos, con los que se encuentran en una relación determinada. Podemos distinguir el cálculo mecánico, escrito u oral, y el cálculo mental.

3. Los problemas, entendiendo por problema toda cuestión que exige la aplicación de una regla dada o la combinación de dos o más leyes conocidas.

La "instrucción en cálculo aritmético" elimina el primero y el último de los aspectos de la aritmética y se centra principalmente en el cálculo mecánico. Por un lado abarca todo lo que las relaciones de los números entre sí pueden dar, desde la relación simple de mayor a menor, pasando por la numeración para llegar a las combinaciones, procesos y operaciones propiamente dichas. Esquemáticamente podríamos centrarlo en el dominio de las cuatro operaciones fundamentales. No otra cosa se entiende cuando se habla del cálculo, sin más. Al hablar, por tanto, de instrucción en cálculo aritmético aludimos al dominio, más o menos mecánico, más o menos rápido, de las cuatro operaciones fundamentales.

En síntesis, pues, la instrucción en cálculo aritmético estaría caracterizada por la posesión de los esquemas numéricos y el dominio del sistema numeral básico para poder proceder a las combinaciones de los números. El conocimiento de estas mismas combinaciones, el dominio de las técnicas y procesos operatorios constituirían un grado más en la instrucción en cálculo. La perfección vendría con la rapidez y exactitud, iniciadas en los comienzos del aprendizaje, pero llevadas a término en los últimos grados de la escuela primaria, en los cuales la automatización de los mecanismos llega a conseguir resultados que constituyen auténticas "marcas". La posesión, uso y dominio de estos instrumentos del cálculo lleva aparejados consigo una serie de valores que han hecho del mismo materia importante de enseñanza, tanto desde el punto de vista social y económico como desde el punto de vista pedagógico. La "instrucción en cálculo" constituye una de las materias de la escuela primaria.

2. ÁREAS DE CÁLCULO

Podemos considerar tres áreas: 1. El área del contar. 2. El área del operar. 3. El área del generalizar.

El área del contar corresponde a lo que psicológicamente se llama génesis de la idea de número. Sus límites llegan a señalarnos la formación de la idea de número, la adquisición de seguridad y constancia en la aprehensión de las cualidades, al mismo tiempo que la maduración y puesta a punto de los mecanismos y automatismos necesarios para la expresión oral y gráfica de las cantidades.

Desde el punto de vista instructivo, que es el que nos interesa, el área del operar, en su doble vertiente del área de la combinación y el área del proceso, añade nuevos matices y perfeccionamientos al área del contar. A la distancia y enumeración de los objetos añádese ahora la idea de doble, mitad, tres veces mayor o más pequeño. Si antes cada número era igual al anterior más la unidad, ahora cada uno de los números suscita una serie de combinaciones coincidentes todas en un resultado final. Eso en el área de la combinación.

En el área del proceso se pasa desde la doble noción fundamental del incremento y disminución de las cantidades, base de la suma y multiplicación por un lado y de la resta y división por otro, se pasa, decimos, a la mecanización de esas nociones mediante la memoriza-

ción de los procesos operacionales, a las mismas operaciones. La comprensión del aparentemente sencillo sistema de numeración suele convertirse en fenómeno poco frecuente en los primeros grados y no llega sino como resultado conjunto del desarrollo, la maduración, la repetición frecuente y la enseñanza.

La tercera de las áreas es la llamada del generalizar o de los principios. La formulamos en último término por varias razones, todas ellas de fácil comprensión. En primer lugar, porque temporalmente se da la última. Ya hemos dicho que llegar al dominio de los principios, de las generalizaciones, no es frecuente, y lo más ordinario resulta ser fruto conjunto de varios factores. Suele darse como culminación de los períodos o etapas anteriores a las cuales perfecciona y da sentido.

Y en segundo lugar, porque viene a ser como la meta a que hay que aspirar en la enseñanza del cálculo. Es algo así como el esmalte transparente que, cubriendo por completo los objetos, los abrillanta y parece como transformarlos, dándoles nueva presentación y mejor aspecto del que en realidad les corresponde. Algunos didactas de la moderna escuela prefieren considerarlo como base para la memorización y mecanización. No cabe la menor duda sobre la eficacia de la comprensión inicial. Lo difícil es llegar a ella.

Consideradas las zonas del área de los principios y del generalizar podríamos señalar como fuentes de esos principios y generalización los siguientes aspectos: inteligencia y comprensión del conjunto de convenciones que forman el sistema de numeración decimal, el dominio de las propiedades de los números, la formulación comprensiva de las reglas operatorias fundamentales, formulación, en un principio, personal, científica y elaborada después.

El dominio de estos principios permite generalizaciones y aplicaciones a campos de la matemática, incluso de la matemática superior, que resultan sumamente difíciles o intensamente memorísticos sin él. De hecho no se puede pasar del cálculo a la aritmética y a la solución de problemas sin haber asimilado al menos las tres zonas de que hemos hablado anteriormente. Por este motivo esta etapa de los principios y de la generalización la podemos calificar la etapa de la aplicación.

La construcción de la Escala de Cálculo que ahora presentamos nos ha servido para llegar a esta clasificación. No se nos oculta que son muchas las áreas de cálculo a las que podíamos haber aludido. Desde luego no hemos pretendido hacer una enumeración exhaustiva, ni siquiera completa. Tanto más cuanto que de la división clasificatoria pre-

sentada solamente nos vamos a quedar con un apartado, aunque los demás los hayamos podido tener en cuenta. De querer medirlas todas se corre el riesgo de perder en precisión lo que se ha pretendido ganar en extensión.

Pero además del área que hasta aquí hemos ido delimitando y que podríamos llamar de la instrucción por referirse directamente a los conocimientos y basarse en ellos, podemos considerar el área del dominio o facilidad para el cálculo. Se consigue por el ejercicio o la práctica y se refiere a la disposición y destreza para realizar con rapidez y seguridad los ejercicios.

Debemos también referirnos a otro sector interesante en las mediciones sobre el cálculo. Lo podríamos llamar **CÁLCULO FUNDAMENTAL Y NO FUNDAMENTAL**. Con esta denominación se quiere expresar la diferencia que se da entre los procesos operatorios que se basan en las cuatro reglas fundamentales del cálculo y aquellos otros procesos en que se aplican las cuatro reglas, pero que en sí mismos no constituyen un principio operatorio. El área del cálculo fundamental lo constituirán las cuatro operaciones fundamentales: *SUMA*, *RESTA*, *MULTIPLICACIÓN* y *DIVISIÓN*. En cambio será cálculo no fundamental la raíz cuadrada, las operaciones con los quebrados, etc. Por sí mismas estas operaciones no poseen el principio operatorio propio en el desarrollo de su proceso; han de acudir a las operaciones fundamentales. Nos encontramos, por tanto, ante una nueva limitación. Cuando hablamos del cálculo, nos referimos al área de las operaciones fundamentales y prescindimos de todo lo que no sean la suma, resta, multiplicación y división. Como fácilmente puede verse, prescindimos de criterios más o menos sociales, utilitaristas, pedagógicos o psicológicos con respecto al cálculo y nos atenemos al criterio intrínseco para su determinación. Son fundamentales las operaciones básicas y esenciales. Sin contraponerlas completamente a éstas, serán no fundamentales las que se apoyan o necesitan de las primeras para su proceso.

3. RAPIDEZ Y SEGURIDAD

Dominar el cálculo es, además de conocerlo, estar instruido en él, realizar los ejercicios pronto y bien. La rapidez supone evocación fácil de los automatismos, de suerte que el tiempo empleado en evo-

carlos es mínimo. La seguridad indica que la formación de los citados automatismos es correcta. Volviendo a nociones anteriormente expuestas podríamos afirmar que si bien tanto en el área de la instrucción como en el área del dominio interviene la memoria, predomina en la primera de las áreas, la segunda, la del dominio se halla más directamente relacionada con el tipo psicológico individual.

De ordinario se hace más hincapié en la seguridad que en la rapidez, aunque la velocidad de vértigo a que nos estamos acostumbrando a vivir no permite desprendernos de la consideración de la rapidez. La seguridad de cálculo la mediremos por el número de respuestas exactas. Es el punto de referencia más frecuente en los ejercicios escolares. En las pruebas de cálculo sirve para el establecimiento de las normas y baremos. Resulta ser una buena medida del área de cálculo cubierta por un alumno y rebela los conocimientos y destrezas adquiridos por el mismo.

El cálculo es en el fondo la parte preponderantemente mecánica, automática, de la aritmética. Cuando se consigue una reacción justa y rápida, el cálculo tiende a emular el trabajo de una máquina. Por eso el cálculo está ligado a lo que se conoce con el nombre de "automatismos".

Para muchos maestros el alumno que no calcula con rapidez es un alumno que no ha sido entrenado suficientemente. Esto equivale a decir que sus adquisiciones en cálculo no han sido suficientemente impulsadas o favorecidas. En definitiva, su instrucción en cálculo aritmético es deficiente. La misma reflexión hacen respecto de la seguridad o exactitud. Ambos criterios, rapidez y seguridad, están ligados al problema de la formación de los automatismos y de la mecanización de los procesos.

Rapidez y seguridad son dos objetivos de instrucción en cálculo. Como objetivos pedagógicos no pueden oponerse ni desconocerse. Esto quiere decir que si se busca la rapidez ha de ser manteniendo la exactitud, incluso, naturalmente, aumentándola. De igual manera se ha de buscar la exactitud al mismo tiempo que se ha de poner esencial atención para desarrollar la rapidez. El examen de la aptitud de los alumnos da por resultado la estimación de superioridad a favor de aquéllos que con idéntica seguridad son más rápidos. Sin embargo, parece que goza de mayor estimación la seguridad o exactitud. Con frecuencia, con criterio mal entendido, se busca la rapidez a expensas de la perfección, invirtiendo el orden de los valores.

Siendo el aprendizaje de la aritmética el aprendizaje de un saber continuo, estando ligadas las nociones unas a otras en sucesión ininterrumpida, la rapidez, la exactitud calculadora final depende en gran parte del cuidado que se tome desde el principio. Es más, en la adquisición final, la rapidez dependerá, principalmente, tanto del cuidado inicial como de los sucesivos grados de exactitud. Por otra parte se puede dar fácilmente la perseverancia de los errores. Es decir, los errores cometidos en los primeros grados tienen tendencias a perpetuarse a lo largo del mismo y por esta razón bloquean el progreso.

La medición de la rapidez y de la seguridad se convierten para el maestro en fundamento del entrenamiento a que debe someter a sus alumnos. Si la seguridad está en proporción directa del número de ejercicios bien resueltos, la rapidez está en proporción inversa del tiempo empleado en resolverlos. La determinación de ambos elementos resulta fácil por medio de una escala de cálculo.

4. DIFICULTADES OPERATORIAS

Podemos determinar la dificultad de una operación por el número de errores que cometen los escolares al realizarla. Distinguiremos tres clases de dificultades: las procedentes del sujeto, las procedentes del cálculo y las que vamos a llamar "mixtas".

1. *Procedentes del sujeto.* — Aunque la inteligencia correlacione poco con la habilidad para el cálculo, interviene necesariamente en él, como interviene en todos los procesos del aprendizaje. Entre las causas, de las menos específicas, si se quiere, de las dificultades que experimentan los escolares está la falta de comprensión de los procesos operatorios. La perfección en rapidez y exactitud exigidas con frecuencia postulan capacidad para abarcar el proceso en su totalidad o en sus detalles. Una de las facultades que más intervienen en el aprendizaje del cálculo es la memoria. Mediante ella se logran los automatismos. Es factor importante para la rapidez. Una deficiente memoria se traduce primero en lentitud, al tener que suplir la reflexión y el esfuerzo evocador el papel asignado a la misma. Luego se traduce también en dificultad para formar los automatismos. La práctica ha de suplir el efecto fijador de la memoria. Un tipo no apropiado de memoria se traduce en perturbaciones de las conexiones y resistencia para formar determinadas asociaciones. Recordemos también la dificultad que puede suponer

recordar reglas mecánicas desprovistas de sentido, si la enseñanza no ha procurado dárselo.

2. *Procedentes del cálculo mismo.* — El cálculo presenta dificultades. A tres podemos reducirlas: en primer lugar, las provenientes del conocimiento deficiente de la naturaleza y estructura del sistema numeral. Por ejemplo, la mayor parte de las dificultades en la resta provienen de la falta de comprensión del valor relativo de las cifras. El cero, tan estudiado en la mayor parte de las combinaciones de las cuatro operaciones, resulta para los alumnos un guarismo desprovisto de significado. En los errores cometidos por los escolares se nota más la deficiente capacidad intelectual en los errores de numeración y en los de los procesos.

En segundo lugar, las combinaciones. Casi todos los estudios sobre las dificultades, bien se trate de los números dígitos o de números de varias cifras o bien de combinaciones directas o inversas, distinguen entre combinaciones fáciles y difíciles. Es evidente que no todas las combinaciones presentan la misma dificultad.

En tercer lugar, los procesos propiamente dichos. El aprendizaje de las cuatro operaciones fundamentales con números enteros implica, no sólo un claro concepto de la naturaleza y estructura del sistema numeral en sí mismo, sino también el dominio de las técnicas operatorias aritméticas. Aquí la expresión “técnicas operatorias” coincide con lo que venimos llamando “procesos”. Es decir, se refiere a los pasos, etapas que hay que recorrer mediante las combinaciones para realizar la operación. Por ejemplo, la colocación de las cantidades, de los signos; la sucesión de las diversas combinaciones numéricas; los artificios no combinatorios que hay que realizar, por ejemplo, en la división, para separar las cifras, bajar las siguientes del dividendo, etc. El orden en el que se deben efectuar las combinaciones para, por ejemplo, obtener unidades en el producto, luego decenas, etc. Todos estos casos forman parte de los procesos. No todos son igualmente difíciles, de la misma manera que todos los procesos completos de las operaciones difieren.

3. *Causas mixtas.* — Quizá sea más exacto denominarlas “causas por interferencia”. Unas veces puede ser que se interfieran los conocimientos de las combinaciones. Por ejemplo, si en la suma y la resta los alumnos han aprendido que $9 + 0 = 9$ y $9 - 0 = 9$, llegado el momento de aplicar las mismas combinaciones a la multiplicación y división efectúan también $9 \times 0 = 9$, $9 : 0 = 9$. También la similitud de los procesos es causa de no pocas interferencias. Dejando de

lado el caso nada raro de olvidar un proceso cuando se aprenda otro nuevo o el hallazgo de un procedimiento nuevo, mezcla de los conocidos, pero que evidentemente no conduce al resultado satisfactorio. A título de ejemplo de interferencia en los procesos operatorios mencionaremos unos cuantos de los encontrados al corregir los ejercicios propuestos para nuestra escala.

Cuando los sumandos forman varias columnas, en las sumas parciales de cada una de ellas solamente se escriben las unidades; las decenas se añaden mentalmente a la columna de la izquierda. Al encontrarse el alumno, sobre todo el principiante, con un ejercicio como éste:

$$\begin{array}{r} 80 \\ 44 \\ 50 \\ 61 \\ 33 \\ \hline 28 \end{array}$$

sumaba como aparece. Y también en este otro:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

Un ejemplo típico de interferencia en la resta es el siguiente:

$$\begin{array}{r} 989 \\ 764,65 \\ \hline 225,65 \end{array}$$

Como en la suma los decimales se suman sin tener en cuenta los espacios vacíos, al no encontrar cifras en el minuendo, procede como en la suma y coloca en la diferencia 65 en los decimales. El proceso de la suma se transfirió a la resta e impidió ver el principio de la numeración decimal que debía aplicarse. La transferencia fue negativa.

Un ejemplo típico de transferencia en la multiplicación constituye el ejercicio siguiente que transcribimos fielmente de una de las hojas de ejercicios propuestas para nuestra escala :

$$\begin{array}{r} 0,405 \\ \times 0,601 \\ \hline 405 \\ 2700 \\ \hline 0,027405 \end{array}$$

El fallo del ejercicio se ha dado en la multiplicación del 6 por el multiplicando. Se efectuó $6 \times 5 = 30$; llevo 3; como el cero no se multiplica, $6 \times 4 = 24$ y 3 que llevamos: 27. Si se tratase de un caso aislado no lo señalaríamos. Como el fallo se repite, nos hemos creído ante una dificultad creada por interferencia de procesos operatorios.

A causa de la complejidad de la operación la división escrita resulta más difícil de analizar. Se necesitaría completar los datos mudos que proporciona el escrito con datos procedentes de realización oral de las operaciones. Los principales puntos de interferencia se centran en el cero, ya sea del dividendo o del divisor, ya sea del cociente y en los decimales.

Estos casos de interferencia ponen de manifiesto la doble causa de la misma: las disposiciones particulares del individuo y la naturaleza de la situación de cálculo. Unos sujetos cometen errores con mayor facilidad y frecuencia que otros. Existen, por otro lado, ejercicios que presentan mayor dificultad para su correcta ejecución.

5. EDAD DE CÁLCULO

Estas consideraciones nos llevan como de la mano a la noción de edad de instrucción en cálculo aritmético. Por un lado tenemos que la enseñanza del cálculo es función del desarrollo general y de una sana metodología. Por otro lado debe existir una edad óptima para la adquisición de los procesos y combinaciones, conocimientos, automatismos, etc., que deben ser poseídos a una edad determinada.

El conocimiento de esta edad óptima, para el aprendizaje de los diversos aspectos del cálculo, es importante desde el punto de vista

didáctico. El establecimiento de los niveles propios de cada edad repercutirá en la organización escolar y también en el desarrollo psicológico del alumno y el trato diferencial que haya que dispensarle. Esto es lo que quieren significar las expresiones de edad de enseñanza, edad de aprendizaje, edad de instrucción. Conceptos todos, en el fondo, no muy diferentes unos de otros. Su conocimiento es básico para los maestros. Querer enseñar una noción antes de la edad óptima es no solamente una pérdida de tiempo y esfuerzo por parte del maestro y los alumnos, sino que es también abocar al fracaso un número considerable de alumnos y un número todavía mayor al "medio-conocimiento" que caracteriza a tantos alumnos y que contrasta con la claridad de pensamiento que debía producir el estudio de la aritmética.

Los instrumentos de medida en Pedagogía se dirigen precisamente a determinar estos valores tan importantes de la instrucción de los alumnos. Cifra de todos ellos es lo que llamamos "la edad de instrucción".

Midiendo la capacidad para resolver el conjunto de las situaciones que plantea el cálculo, la rapidez, la seguridad, no hacemos sino preparar el camino para precisar las posibilidades de los escolares a lo largo de su período de instrucción. Decir que el alumno tiene 8, 10, 14 años de instrucción en cálculo, es afirmar la capacidad para resolver las dificultades que normalmente resuelven los alumnos a su edad, para obtener la puntuación que los baremos señalan para esa edad.

A procurar la ventaja de esta univocidad es a lo que aspira la "escala de instrucción en cálculo aritmético". Por un lado tenemos lo que pudiéramos llamar "medidas colectivas" y por otro "medidas individuales". Las primeras están constituidas por la media y la sigma de cada grupo y que sirven para darnos a conocer el adelanto o retraso de las clases probadas con relación a los grupos de la misma edad que han servido para constituir la norma. Las segundas vienen dadas por los percentiles, mediante los cuales situamos a los alumnos en particular, según la edad que tienen y la puntuación que han obtenido en cada una de las operaciones. Más adelante damos a conocer los cuadros que contienen estas normas y baremos.

6. ESCALA DE INSTRUCCIÓN EN CÁLCULO ARITMÉTICO

Nuestra Escala de Cálculo entra dentro de la categoría de los tests llamados "de rendimiento", o en términos americanos, de los "achieve-

ment tests". Estos tests, como su nombre lo indica, se emplean para medir el rendimiento o adquisiciones de los escolares en una rama determinada. Proporciona datos sobre el nivel general de las adquisiciones de los escolares por comparación de sus resultados en los tests con las normas y baremos.

En el origen del empleo de estos tests nos encontramos con los tests de Courtis. Medían el rendimiento en ocho funciones: suma, resta, multiplicación, división, copia, rapidez razonamiento, mecanismos fundamentales y razonamiento propiamente dicho.

Ahora bien, al medir el rendimiento de los escolares, podemos emplear dos clases de tests. Por un lado, los tests realmente especializados para cada uno de los grados; en ellos los ítems son de dificultad uniforme y tratan de descubrir el rendimiento de cada grado, pero aisladamente y de cada alumno individualmente, pero que no permiten un punto de comparación entre los diversos grados de un grupo escolar, por ejemplo.

Por otro lado podemos encontrarnos con tests, en los que los ítems ofrecen con dificultad creciente, de suerte que pueden ser aplicados a alumnos en diversos grados de progreso en cálculo. Al mismo tiempo que miden el rendimiento de cada alumno, nos proporcionan datos para poder establecer una comparación entre los diversos grados de un grupo escolar, ya que abarcan dificultades susceptibles de ser vencidas por los menos iniciados. Ejemplo típico de los primeros es el ya mencionado test "Courtis Standard Research Tests: Arithmetic", publicado en 1918. Ejemplo típico de los segundos es el de Woody-McCall "Midex Fundamentals Arithmetic Test", ideado para ser aplicado desde el tercer grado al octavo (9 a 14 años).

Las escalas de aritmética se pueden catalogar como tests de rendimiento. Ateniéndonos a la distinción establecida por Brueckner precisaremos que son instrumentos de medida, no de evaluación. El término "medida" se reserva al uso de los métodos objetivos y precisos de cuya aplicación se obtienen datos sobre aquellos aspectos del individuo, que se prestan a un análisis cuantitativo. En estos casos, los datos pueden ser comparados con normas objetivas previamente establecidas y tipificadas. Conviene, sin embargo, que hagamos una distinción. El hecho de que las escalas sean instrumentos de medida que proporcionan un resultado cuantitativo, no impide el que también puedan ser considerados aptos para darnos a conocer un rendimiento en dos apar-

tados: A) rendimiento escolar propiamente dicho; y B) diagnóstico de los escolares.

La utilización de la escala en la medición del rendimiento de los escolares viene a ser la contrapartida de la apreciación subjetiva del maestro. El empleo de un test de rendimiento descubre al maestro si su clase como grupo y si cada alumno de su clase tiene los conocimientos y destrezas que un alumno medio de esa misma edad o grado escolar puede y debe poseer. Algunos alcanzan y sobrepasan las normas. Otros, por el contrario, manifiestan un rendimiento insuficiente y reclaman automáticamente una ayuda particular para superar esa deficiencia.

Lo más importante para el maestro, en estas ocasiones, es saber exactamente dónde se encuentra la deficiencia, localizarla. Si un alumno es incapaz de vencer una dificultad, la repetición del ejercicio no será suficiente para que logre superarla. Posiblemente, y esto es más grave, la repetición "ciega" en estas condiciones no serviría sino para que se afiance el error y hacerlo cada vez más difícil de corregir.

La escala que ahora ofrecemos a los maestros no tiene otra finalidad que ayudarles a diagnosticar las deficiencias de los escolares y proporcionarles un medio rápido de medir la habilidad que los alumnos poseen.

Para la confección de la escala hemos arrancado del modelo que nos ofrecía la escala de Clifford Woody, según ya hemos dicho anteriormente. Esta escala que hemos tomado como modelo no nos ha impedido proceder con libertad a la hora de determinar el contenido y ejercicios de la nuestra. La consulta de los estudios experimentales que han llegado a nuestras manos en Madrid, Barcelona y Lovaina nos ha permitido formar un elenco de combinaciones, dificultades, procesos y operaciones que luego hemos tratado de repartir en las 120 operaciones que componen la escala.

Como es de rigor en estas ocasiones hemos realizado una prueba previa mediante un test compuesto de 136 operaciones: 40 sumas, 30 restas, 30 multiplicaciones y 36 divisiones. Esta prueba previa, aplicada a unos 490 alumnos, nos ha permitido rectificar el criterio de dificultad previsto para algunos ejercicios y combinaciones, suprimir algunas operaciones inconvenientes y establecer un orden provisional de dificultad basado ya en un criterio experimental.

En la redacción subsiguiente a esta primera aplicación, la escala quedó reducida a 120 operaciones: 30 sumas, 30 restas, 30 multiplicaciones, 30 divisiones. La nueva forma dada a la escala trataba de

contener, si no todas, al menos las principales dificultades, combinaciones y procesos operatorios, ordenados conforme a un criterio de dificultad encontrada por los escolares que habían intervenido en esta prueba previa.

Dadas la importancia y extensión que íbamos a dar a la prueba definitiva reproducimos a imprenta esta nueva redacción. Hicimos tres modelos diferentes, destinados a los alumnos de 10-14 años (Prueba C) con 120 operaciones, de 8-9 años (Prueba B) con 86 operaciones, y de 7-8 años (Prueba A) con 41 operaciones.

Dispuestos a obtener una muestra representativa de la población escolar española, determinamos, mediante las técnicas modernas de selección al azar, las ciudades y grupos escolares de cada ciudad, que nos iban a proporcionar el elemento escolar que debía realizar la prueba. Con el fin de dar mayor garantía a la prueba determinamos no encomendar a nadie esta labor de la recogida de los datos. Por lo mismo la aplicamos personalmente en Madrid, Barcelona, Zaragoza, Bilbao, Sevilla, Salamanca. En total obtuvimos 6.511 protocolos aptos para la elaboración estadística. Repartidos por edades y pruebas, los ofrecemos en el cuadro siguiente:

Prueba	7 años	8 años	9 años	10 años	11 años	12 años	13 años	14 años	15 años	Total
A	338	477	318	132	43	15	3	2		1.328
B		282	629	657	454	151	38	16		2.227
C				402	703	783	683	382	3	2.956
Total . . .	338	759	947	1.191	1.200	949	724	400	3	6.511

Todos estos protocolos útiles son los que nos han servido para determinar el índice de dificultad de las operaciones, en términos de tantos por ciento. Fruto de la labor paciente de recuento de aciertos y errores y elaboración de los datos estadísticos es la escala, ordenada por tercera y última vez y también la serie de índices presentados en el apartado de los baremos.

7. CONTENIDO DE LA ESCALA

Dejamos de lado las combinaciones numéricas, ya que fácilmente se llega a conocer las que intervienen en cada operación y proceso. Por considerarlo más útil exponemos a continuación los principales procesos tenidos en cuenta en los diversos ítems de las cuatro operaciones.

a) *Suma.*

1. Suma de números dígitos con total inferior a diez. Números 1, 3.
2. Suma de números dígitos con total dentro de la segunda decena. Núms. 2, 4.
3. Suma de números dígitos con total dentro de la tercera decena. Núms. 5, 7.
4. Suma de varios números sin llevada en la primera columna. Núms. 6, 8, 9.
5. Suma de números con llevada desde la primera columna. Núms. 10, 12, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.
6. Suma en la que se ha buscado intencionadamente el efecto de la fatiga. Núms. 13, 17, 21, 28, 29.
7. Suma de números, todos del mismo número de cifras. Números 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 28.
8. Suma de números de distinto número de cifras. Núms. 16, 19, 22, 26, 27, 29, 30.
9. Suma de decimales con total sin llevada de los decimales a los enteros. Núms. 11, 14.
10. Suma de decimales con llevada en el paso de los decimales a los enteros. Núms. 18, 26, 29, 30.

b) *Resta.*

- A) Todas las cifras del minuendo son mayores o iguales que las del sustraendo:
 1. Ambos números son dígitos. Núm. 1.
 2. Sólo el sustraendo es dígito. Núm. 2.
 3. Igual número de cifras en el minuendo que en el sustraendo. Núms. 3, 4, 5, 16, 18.

4. Una cifra menos en el sustraendo. Núms. 6, 13.
- B) Alguna cifra del sustraendo mayor que su correspondiente del minuendo:
 1. Solamente una cifra. Núms. 7, 8, 11, 12, 20, 21, 22, 27, 30.
 2. Varias cifras. Núms. 9, 10, 14, 15, 17, 19, 23, 24, 25, 26, 28, 29.
 3. La primera cifra de la izquierda es la unidad y no tiene correspondiente en el sustraendo existiendo llevada de la combinación anterior. Núms. 14, 19, 20, 25.
- C) Combinaciones con el cero:
 1. El cero en el sustraendo únicamente. Núms. 5, 8, 10, 14.
 2. En ambos como simple diferencia. Núms. 4, 12, 16, 21.
 3. En ambos, pero con llevada de la combinación anterior. Núm. 22.
 4. Solamente en el minuendo. Núms. 9, 11, 17, 23, 24, 26.
 5. Cero en el minuendo y nueve en el sustraendo, pero con llevada de la combinación anterior. Núms. 17, 23.
- D) Operaciones con decimales:
 1. Decimal en el minuendo solamente. Núms. 13, 27.
 2. Decimal en ambas partes. Núms. 16, 18, 20, 21.
 3. Decimal sólo en el sustraendo. Núms. 28, 29, 30.

c) *Multipliación.*

1. Producto de dos números dígitos. Núm. 1.
2. Producto de un número de varias cifras por un dígito, pero sin llevada de los productos anteriores. Núms. 2, 3.
3. Producto de un número de varias cifras por un dígito, pero con llevada de los productos parciales anteriores. Números 4, 6, 10.
4. Producto de dos números con ceros finales en el multiplicador. Núms. 7, 8, 11, 28.
5. Producto con ceros finales en el multiplicando. Núms. 3, 12, 21.
6. Producto con ceros finales en ambos términos. Números 9, 27.
7. Producto con ceros finales en uno de los factores y en el otro decimal. Núms. 20, 28.

8. Producto cuando en el multiplicador existen ceros intercalados. Núms. 16, 17, 19, 23, 24, 25, 27.
9. Producto cuando en el multiplicando existen ceros intercalados. Núms. 8, 16, 19, 24, 25, 27, 28, 29.
10. Producto de un decimal por un entero. Núms. 10, 28.
11. Producto de un entero por un decimal. Núms. 13, 14, 15, 20, 30.
12. Producto de dos números ambos decimales. Núms. 18, 19, 22, 25.
13. Producto de dos números con posibilidad de aplicar la propiedad conmutativa de la multiplicación. Núm. 12.
14. Operación en la que fácilmente puede intervenir el efecto de la fatiga o la interrupción de la atención. Núm. 29.

d) *División.*

1. División exacta de dos números dígitos. Núm. 1.
2. División exacta de un número de dos cifras por un dígito, con una sola cifra en el cociente. Núm. 2.
3. División exacta con una cifra en el cociente. Núms. 1, 2, 5.
4. División de un número de varias cifras por un dígito. Varias cifras en el cociente. Núms. 3, 4, 7.
5. División de un número de varias cifras por otro de dos con una sola en el cociente. Núm. 5.
6. División de un número de varias cifras por otro de dos cuando la segunda del divisor es mayor de 5. Núms. 8, 11, 14, 15, 16, 18, 20, 23, 26, 27, 29.
7. División de un número de varias cifras por otro de dos cuando la segunda del divisor es menor de 5. Núms. 5, 6, 7, 9, 10, 13, 17, 19, 22, 24, 25, 30.
8. División en la que la primera cifra del dividendo es divisible por la primera cifra del divisor. Núms. 1, 4, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 30.
9. División en la que la primera cifra del dividendo no es directamente divisible por la primera del divisor. Núms. 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 16, 18, 19, 25, 26, 28, 29.
10. División de enteros con ceros finales en el dividendo y el divisor. Núms. 7, 14.
11. División con ceros finales solamente en el dividendo:

- a) Con cociente exacto al final. Núm. 15.
 - b) Con cociente exacto antes del final. Núm. 23.
 - c) Con ceros finales provenientes de los decimales del divisor. Núms. 21, 27.
- 12. División con ceros finales sólo en el divisor. Núm. 25.
 - 13. División con ceros finales en el cociente. Núms. 20, 21, 23.
 - 14. División con cero intermedio en el cociente. Núms. 6, 8, 23, 24, 30.
 - 15. División de un decimal por un entero. Núms. 22, 24, 26, 29.
 - 16. División de un entero por un decimal. Núms. 20, 21, 27.
 - 17. División de decimales entre sí. Núms. 12, 28, 30.
 - 18. División en la que la primera cifra del cociente es cero seguido de coma. Núms. 26, 28, 29.
 - 19. División con extracción de decimales. Núms. 18, 19, 22, 25, 28.

Mas este diagnóstico no puede menos de ser general. Para ser completo, además de los errores y dificultades ha de descubrir las causas. El diagnóstico completo requiere algo más que el control y confrontación de los resultados numéricos o la catalogación de errores en los apartados generales que hemos mencionado. Brueckner señala 6 procedimientos entre los que coloca el examen del trabajo escrito de los escolares:

- 1. Observación de los hábitos, actitudes, reacciones del alumno.
- 2. Análisis de los trabajos escritos de los alumnos, día a día.
- 3. Análisis de las respuestas orales y de las reacciones orales de los aprendices.
- 4. Artificios objetivos para determinar la naturaleza y significación de los fallos.
- 5. La entrevista.
- 6. Procedimientos de laboratorio.

Y es que nuestro test, aunque general, no es suficientemente analítico, ni psicológico. No puede serlo. El mantenimiento de la objetividad ha hecho que sacrificáramos algunos valores, que una escala no puede, objetivamente, comprender.

Por lo mismo insistimos en la utilidad de nuestra escala como diagnóstico general y también como principio de una diagnosis individual y particular. En este sentido creemos útil un recorrido por los errores más frecuentes en cada una de las operaciones y que son los que han servido para catalogar al mismo tiempo que hacíamos la corrección.

1. *Suma.*

- a) Error de suma en la columna (1, 2, 3, 4).
- b) Error de coma (omisión).
- c) Error de coma (desplazamiento).
- d) Olvido de alguna cifra.

2. *Resta.*

- a) Error de resta en la columna (1, 2, 3, 4, ...).
- b) Error de coma (omisión).
- c) Error de coma (desplazamiento).
- d) Olvido de alguna cifra.
- e) Error en la combinación especial semejante a
$$\begin{array}{r} 3 \\ - 1,8 \\ \hline \end{array}$$
 cuando

do el sustraendo es decimal y el minuendo no.

- f) Efectúa una suma en lugar de una resta en toda la operación o en alguna columna solamente.
- g) Invierte los términos al efectuar la resta, tomando el minuendo por sustraendo y viceversa, especialmente cuando la cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo.
- h) Descomposición para paso a decenas; llevada compensatoria.

3. *Multiplicación.*

- a) Error de multiplicación (en la columna 1, 2, 3, 4, ...).
- b) Error de coma (omisión).
- c) Error de coma (desplazamiento).
- d) Omisión de ceros finales en el producto.
- e) Error por multiplicar por los ceros del multiplicador.
- f) Error de suma.
- g) Error por causa del cero intermedio (en los productos parciales).
- h) Colocación falsa de los productos parciales.

4. *División.*

- a) Error en la estimación del cociente (en la cifra 1, 2, 3, 4, ...).
- b) Error en la coma (omisión).

- c) Error al compensar los decimales del dividendo y del divisor.
- d) Error en la coma (desplazamiento).
- e) Omisión de los ceros finales en el cociente.
- f) Error en cero intermedio en el cociente.
- g) Error en los residuos parciales o final.
- h) Error al bajar las cifras del dividendo.

8. LOS EJERCICIOS DE LA ESCALA

He aquí la escala que hemos confeccionado como resultado de la elaboración estadística a que hemos sometido los datos obtenidos en nuestro trabajo. El número que figura a la izquierda, entre paréntesis, indica el escalón y sirve al mismo tiempo de número de orden. Aunque ahora la presentamos como escala única (Prueba C la llamamos) comprende al mismo tiempo las otras dos pruebas, B y A. Basta tener en cuenta que la Prueba B, destinada a los alumnos de 8-9 años, exclusivamente, comprende solamente las operaciones 1 a 26 en la suma; 1 a 22 en la resta; 1 a 19 en la multiplicación y división. La Prueba A abarca las operaciones 1 a 13 en la suma; 1 a 10 en la resta; 1 a 9 en la multiplicación y división.

ESCALA DE INSTRUCCIÓN EN CÁLCULO ARITMÉTICO

PRUEBA C						SUMA			
(1)	1	(10)	38	(16)	75	(21)	67	(26)	81,13
	4		76		904		30		6.021
	2		47		59		87		631,406
			36		330		45		378,5
(2)	6		52		22		38		9100,0008
	2				63		73		
	3	(11)	0,02				78	(27)	106
			0,31				75		956055
(3)	2		0,44	(17)	40		41		158
	3		0,02		17				23
	4		0,12		74				9454
					99	(22)	5		9060104
(4)	7	(12)	37		48		77		
	8		79		26		952		
	2		46		67		715	(28)	79133
			45				1242		12757
(5)	9		20				2133		84889
	5		86	(18)	0,6		3848		63206
	4				0,5				57797
	7	(13)	4		0,7	(23)	807		49875
			8		0,1		692		93707
(6)	21		5		0,9		544		
	50		8				986	(29)	77204,9
	33		8				774		57
	22		5	(19)	91		855		64
			7		5812				98388,7
(7)	3		6		4				6
	5		3		1036	(24)	295		538,2
	6				1201		810		1030
	8	(14)	80,1		670		698		5,6
			23,4		9491		452		
(8)	75		64,3				778		
	71		31,1				286	(30)	101,07
	30		6086	(20)	0,4				60,901
	83	(15)	7851		0,5	(25)	601		0,54
			5376		0,6		2227		41,95
(9)	80		5376		0,8		109		0,858
	44		2560		0,3		5901		0,47
	50		6307		0,3		145		42,69
	61		1035				9302		0,96
	33								

ESCALA DE INSTRUCCIÓN EN CALCULO ARITMÉTICO

PRUEBA C			RESTA		
(1)	8 — 3	(11)	7880 — 467	(21)	0,913 — 0,223
(2)	17 — 4	(12)	49160 — 2090	(22)	5901 — 506
(3)	48 — 25	(13)	57,6 — 32	(23)	5001 — 506
(4)	604 — 403	(14)	12838 — 3770	(24)	857017 — 68848
(5)	827 — 120	(15)	6123 — 2354	(25)	112432 — 94448
(6)	294 — 91	(16)	0,63 — 0,12	(26)	53506 — 45516
(7)	23 — 8	(17)	6705 — 598	(27)	61,9 — 43
(8)	9547 — 1095	(18)	4,75 — 4,32	(28)	989 — 764,65
(9)	8300 — 2036	(19)	13249 — 8388	(29)	4219 — 869,65
(10)	97245 — 40669	(20)	16,6 — 8,2	(30)	786 — 686,5

ESCALA DE INSTRUCCIÓN EN CÁLCULO ARITMÉTICO

PRUEBA C

MULTIPLICACIÓN

(1)	$\begin{array}{r} 7 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	(11)	$\begin{array}{r} 2371 \\ \times 60 \\ \hline \end{array}$	(21)	$\begin{array}{r} 7380 \\ \times 91 \\ \hline \end{array}$
(2)	$\begin{array}{r} 92 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	(12)	$\begin{array}{r} 9000 \\ \times 7154 \\ \hline \end{array}$	(22)	$\begin{array}{r} 5,67 \\ \times 0,43 \\ \hline \end{array}$
(3)	$\begin{array}{r} 8130 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	(13)	$\begin{array}{r} 627 \\ \times 0,7 \\ \hline \end{array}$	(23)	$\begin{array}{r} 84102 \\ \times 307 \\ \hline \end{array}$
(4)	$\begin{array}{r} 356 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$	(14)	$\begin{array}{r} 561 \\ \times 2,7 \\ \hline \end{array}$	(24)	$\begin{array}{r} 80436 \\ \times 2064 \\ \hline \end{array}$
(5)	$\begin{array}{r} 22 \\ \times 31 \\ \hline \end{array}$	(15)	$\begin{array}{r} 5638 \\ \times 0,08 \\ \hline \end{array}$	(25)	$\begin{array}{r} 571,08 \\ \times 5,04 \\ \hline \end{array}$
(6)	$\begin{array}{r} 76059 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$	(16)	$\begin{array}{r} 57108 \\ \times 405 \\ \hline \end{array}$	(26)	$\begin{array}{r} 35187 \\ \times 79 \\ \hline \end{array}$
(7)	$\begin{array}{r} 743 \\ \times 500 \\ \hline \end{array}$	(17)	$\begin{array}{r} 9265 \\ \times 605 \\ \hline \end{array}$	(27)	$\begin{array}{r} 23080 \\ \times 30020 \\ \hline \end{array}$
(8)	$\begin{array}{r} 702 \\ \times 80 \\ \hline \end{array}$	(18)	$\begin{array}{r} 0,7 \\ \times 0,8 \\ \hline \end{array}$	(28)	$\begin{array}{r} 802,09 \\ \times 8900 \\ \hline \end{array}$
(9)	$\begin{array}{r} 1250 \\ \times 80 \\ \hline \end{array}$	(19)	$\begin{array}{r} 0,405 \\ \times 0,601 \\ \hline \end{array}$	(29)	$\begin{array}{r} 31043 \\ \times 2879 \\ \hline \end{array}$
(10)	$\begin{array}{r} 0,56 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	(20)	$\begin{array}{r} 682100 \\ \times 0,001 \\ \hline \end{array}$	(30)	$\begin{array}{r} 45916 \\ \times 9,8 \\ \hline \end{array}$

ESCALA DE INSTRUCCIÓN EN CÁLCULO ARITMÉTICO

PRUEBA C

DIVISIÓN

(1)	$8 \overline{) 4}$	(11)	$39399 \overline{) 69}$	(21)	$9754 \overline{) 7,5}$
(2)	$72 \overline{) 9}$	(12)	$169,84 \overline{) 8,04}$	(22)	$443,4 \overline{) 12}$
(3)	$3628 \overline{) 7}$	(13)	$40992 \overline{) 31}$	(23)	$804960 \overline{) 387}$
(4)	$56 \overline{) 3}$	(14)	$91800 \overline{) 650}$	(24)	$8831,34 \overline{) 63}$
(5)	$276 \overline{) 92}$	(15)	$619500 \overline{) 28}$	(25)	$158769 \overline{) 90}$
(6)	$58439 \overline{) 83}$	(16)	$498026 \overline{) 86}$	(26)	$4,464 \overline{) 88}$
(7)	$78050 \overline{) 70}$	(17)	$643,42 \overline{) 53}$	(27)	$78888 \overline{) 0,19}$
(8)	$159198 \overline{) 39}$	(18)	$428411 \overline{) 47}$	(28)	$0,075 \overline{) 0,6}$
(9)	$8664 \overline{) 51}$	(19)	$80041 \overline{) 94}$	(29)	$0,4408 \overline{) 76}$
(10)	$23877 \overline{) 41}$	(20)	$9918 \overline{) 0,58}$	(30)	$818,208 \overline{) 2,4}$

9. BAREMOS DE LA ESCALA

La escala está destinada para escolares de 7 a 14 años. Para la baremación hemos establecido los niveles de 7-8 años, 8-9 años, 10-14 años de instrucción en cálculo. La escala completa para los 10-14 años se establece sobre la base de 120 operaciones con enteros y decimales, a razón de 30 operaciones por tipo operatorio.

Como es de rigor, hemos establecido normas colectivas e individuales. Las primeras comprenden las medias. Habida cuenta de los límites fiduciales con los que hemos estado operando, dejamos las medias establecidas de la siguiente manera:

		14 años	13 años	12 años	11 años	10 años	9 años	8 años	7 años
Suma	M	23,4	22,7	22,5	22,3	21,5	17,6	16,0	7,5
		4,0	4,0	4,0	3,8	4,8	4,9	4,6	3,8
Resta	M	25,0	24,0	23,5	23,0	22,7	15,2	14,0	5,2
		5,0	4,6	5,1	5,2	5,4	5,0	6,6	3,2
Multiplicación.	M	20,5	19,7	18,5	17,5	16,6	9,5	8,5	4,0
		5,3	5,6	6,0	6,0	6,4	4,2	3,8	2,1
División . . .	M	19,5	18,7	18,0	17,0	16,5	10,0	8,0	3,5
		6,4	5,6	5,6	6,4	6,3	4,8	4,9	2,4
Total		88,4	85,1	82,5	80,8	77,3	52,3	47,5	20,2

Como expresión de las medidas individuales hemos calculado los percentiles para cada una de las cuatro partes en que dividimos la escala completa y también para cada una de las edades tenidas en cuenta.

PERCENTILES

SUMA

Puntuación	EDAD EN AÑOS							
	14	13	12	11	10	9	8	7
30	99	99						
28	97	98	99	99	99			
26	90	91	94	94	94			
25	81	83	85	87	87	99		
24	72	75	77	80	80	98	99	
23	55	65	67	69	69	95	97	
22	46	55	58	59	59	92	95	
21	37	45	47	51	51	84	88	
20	28	36	37	41	41	76	81	
19	24	29	30	33	34	69	78	
18	20	22	23	26	27	62	75	
17	15	17	19	20	22	53	62	
16	10	12	15	15	17	45	50	
15	7	8	11	11	13	41	45	
14	5	5	7	9	9	33	40	
12	3	3	4	5	5	21	31	99
10	1	1	1	1	3	13	21	81
9					2	10	15	72
8					1	8	10	63
7						6	7	53
6						4	5	45
5						3	3	40
4						2	2	35
3						1	1	24
1								6

PERCENTILES

RESTA

Puntuación	EDAD EN AÑOS							
	14	13	12	11	10	9	8	7
30	99	99	99	99	99			
28	91	93	94	95	95			
26	69	74	74	77	79			
25	50	62	64	67	68			
24	40	50	58	58	59			
23	37	43	50	50	55			
22	34	37	39	42	53	99	99	
21	29	32	33	35	42	96	98	
20	25	27	28	29	32	93	97	
19	21	22	24	25	26	84	90	
18	17	18	20	21	21	76	80	
17	13	14	17	18	18	67	71	
16	11	12	14	15	15	60	63	
15	9	9	11	12	12	53	56	
14	7	7	9	10	10	47	50	
12	5	5	6	7	7	35	45	
10	3	3	4	5	5	24	37	99
9	3	3	3	4	4	20	31	97
8	2	2	3	3	4	16	26	90
7	2	2	2	3	3	14	20	79
6	1	1	2	2	3	12	19	66
5			1	2	2	9	14	54
4				1	1	6	10	51
3						2	4	33
1						1	1	20

PERCENTILES

MULTIPLICACIÓN

Puntuación	EDAD EN AÑOS							
	14	13	12	11	10	9	8	7
30	99							
28	96	99	99	99				
26	88	97	97	97	99			
25	79	92	94	94	96			
24	71	87	90	90	94			
23	65	80	84	85	89			
22	60	72	79	80	84			
21	54	64	73	75	78			
20	49	56	67	69	73			
19	42	50	60	64	67			
18	36	44	54	59	61	99	99	
17	29	38	48	53	55	98	98	
16	24	33	42	46	51	97	97	
15	18	29	37	39	48	95	96	
14	12	24	32	33	42	91	92	
12	8	17	23	25	30	83	84	
10	4	11	15	18	22	69	75	
9	3	8	12	14	18	53	64	
8	2	6	10	10	14	49	55	99
7	2	4	8	8	11	43	44	90
6	1	3	6	6	8	37	37	82
5		1	3	3	4	24	25	80
4			1	1	2	10	13	53
3					1	3	6	23
1						1	1	1

10. APLICACIONES DE LA ESCALA

1) *Rendimiento escolar*

La utilización de la escala en la medición del rendimiento escolar viene a ser la contrapartida de la apreciación subjetiva del maestro. El educador utiliza en su diario trabajo unos procedimientos didácticos para él, sin duda, los mejores. La experiencia nos dice que no son todos igualmente valiosos. Los tests y escalas vienen a ser un medio seguro y objetivo.

La confrontación de los resultados de la aplicación de nuestra escala puede proporcionar al maestro el conocimiento de una situación de partida en el aprendizaje o bien, hablando con mayor propiedad, el resultado de un período determinado de instrucción o entrenamiento.

El uso de las normas y baremos permite localizar inmediatamente a un alumno en el marco de la clase y también en el conjunto de la población escolar. Ya que, como señala Delobelle, la comparación de los resultados individuales con los de la clase es insuficiente. Es preciso conocer las normas del conjunto de la población escolar. Gracias a estos datos, el maestro podrá determinar si el rendimiento de la clase es igual, inferior o superior al de otros alumnos de ambientes y condiciones escolares semejantes. Si es inferior, el maestro debe intentar determinar la causa exacta, a fin de poder aplicar el remedio específico y adecuado.

Por lo que acabamos de ver, habríamos de distinguir dentro del rendimiento lo que pudiéramos llamar "el rendimiento individual" y el "colectivo". El primero lo estableceremos por medio de los percentiles y las puntuaciones típicas de la escala. Mientras que el segundo nos lo proporcionará la comparación de la media de la clase, con la media de edades de la escala correspondiente a la edad media de la clase.

Existe además otra clase de medición del rendimiento diferente de éste que pudiéramos llamar "absoluto". Al comprobar las diversas puntuaciones obtenidas a partir de la puntuación bruta del alumno o de la clase no tenemos en cuenta sino el resultado positivo o negativo logrado, pero no el esfuerzo o los intentos realizados, ni el tiempo empleado. Es lo que podríamos llamar "rendimiento relativo".

En efecto, una consideración más precisa del rendimiento nos hará tener en cuenta los intentos de solución de ítems y las soluciones exactas. Es decir, debemos tener en cuenta no sólo los aciertos, sino

también los errores. La seguridad de un escolar es diferente que la de otro si ambos, por ejemplo, han alcanzado la nota 21 en las multiplicaciones, cuando uno probó con las 30 operaciones y otro sólo probó con las 21 y las resolvió todas.

Estos rendimientos relativos difieren notablemente sobre todo si aplicamos para calcularlo algún coeficiente como el siguiente:

$$\text{Rendimiento relativo} = \frac{N - E}{N} \times P$$

en donde P = puntuación o rendimiento absoluto

N = número de operaciones realizadas

E = número de operaciones falladas o errores.

Hemos dicho que el rendimiento debería ser considerado también en función del tiempo empleado por los alumnos. Aunque, como hemos dicho antes, el carácter de escala de dificultad no nos haya favorecido en la obtención de ese tiempo o en el establecimiento de un límite del mismo, las disposiciones que hemos tomado en la aplicación de la prueba nos van a permitir establecer un cálculo de tiempo útil para fijar un jalón en la apreciación del trabajo de los escolares.

El cuadro siguiente presenta el tiempo medio necesario para la resolución de todas las operaciones. Tenemos ya un punto de referencia para poder establecer la rapidez o lentitud de los escolares.

	14 años	13 años	12 años	11 años	10 años
Suma	12' 30"	12' 29"	15' 17"	15' 33"	16' 21"
Resta	5' 46"	5' 55"	7' 4"	7' 6"	7' 4"
Multipliación	13' 35"	14' 21"	15' 30"	16' 55"	17' 36"
División	30' 12"	29' 15"	35' 45"	36' 52"	38' 24"

2) Diagnóstico de los escolares

El empleo de un test de rendimiento descubre al maestro si su clase como grupo y si cada alumno de su clase tiene los conocimientos y destrezas que un alumno medio de esa misma edad o grado escolar puede y debe poseer. Algunos alcanzan y sobrepasan las normas. Otros, por el contrario, manifiestan un rendimiento insuficiente y reclaman automáticamente una ayuda particular para superar esa deficiencia.

Lo más importante para el maestro en estas ocasiones es saber exactamente dónde se encuentra la deficiencia, localizarla. Si un alumno es incapaz de vencer una dificultad, la repetición del ejercicio no será suficiente para que logre superarla. Posiblemente, y esto es grave, la repetición "ciega" en estas condiciones no servirá sino para que se afiance el error y hacerlo cada vez más difícil de corregir.

No basta con haber localizado la dificultad. Es preciso llegar a determinarla, es decir, establecer el diagnóstico, la etiología de las dificultades. Esto resulta tanto más interesante cuanto que un mismo error, una dificultad puede provenir de muy diversas causas. Tenemos a la vista la prueba realizada por un alumno de 8 años.

$$\begin{array}{r} 356 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

$$2548$$

En el ítem resulta difícil averiguar si el resultado es debido a error de tabla ($8 \times 3 = 21$) o bien a error de suma ($24 + 4 = 25$) o, finalmente, a error de llevada del producto anterior. En cambio, no resulta difícil comprobar que otro alumno de 8 años ha fallado todas las operaciones de restar en las que había decimales. Mediante esta observación localizamos y especificamos la dificultad y su posible causa.

Al preconizar el uso de nuestra escala con fines diagnósticos, pensamos en la idea ya expuesta por Woody sobre el uso de los tests de rendimiento estandarizados en general y de su escala en particular. "Estoy convencido de que el mayor provecho que se puede obtener del movimiento en favor de las mediciones educativas será un análisis de las deficiencias de los escolares, puestas de manifiesto por los tests estandarizados." Y en otro lugar W. S. Monroe se hace eco de la

finalidad perseguida por Woody al decimos que por medio de estas escalas puede un maestro localizar las faltas de la clase con relación al aprendizaje, sobre todo con vistas a la futura instrucción. Con Woody, pues, afirmamos la utilidad de nuestra escala para la diagnosis colectiva sobre la diagnosis individual. Los porcentajes de aciertos y errores en cada uno de los ítems vienen a ser muy reveladores. El estudio de los fallos individuales puede también proporcionar una base para la diagnosis individual. Tanto más si a esto añadimos la observación de los hábitos de trabajo del escolar, de sus actitudes y reacciones durante la realización de la prueba. El conjunto puede revelarnos los fallos y algunas de las causas de los mismos, como, por ejemplo, contar en lugar de calcular, falta de atención, interés o esfuerzo.

3. *Clasificación escolar*

La creciente importancia de la medida en la Pedagogía está atestiguada por el rápido crecimiento de los tests y el empleo cada vez más creciente de los mismos para sustituir a los exámenes tradicionales. Al decir de Chauncey y Frederickson existe una razón básica de la importancia lograda por los tests: el empleo de los tests ha producido en los educadores el convencimiento de que ofrece una ayuda única en muchos problemas de consejo, dirección y particularmente en lo que ellos llaman "placement" y que podemos traducir por "colocación, distribución o clasificación de los escolares". Este problema se ha convertido en uno de los más importantes de la pedagogía moderna. Como resultado del planteamiento de esta situación, convienen todos los docentes en la necesidad de enseñar a cada alumno lo que éste puede realmente aprender y también la necesidad de agrupar a los escolares en clases "homogéneas". Para Fernández Huerta esta homogeneidad buscada se considera bajo cuatro aspectos: intelectual, instructivo, cronológico, vital. Es decir, tiene en cuenta la capacidad, los conocimientos, la edad y la madurez. El cálculo forma parte de esas materias de instrucción que se han considerado como básicas para el establecimiento de esa homogeneización. Lectura, escritura, ortografía y cálculo son las materias comúnmente elegidas.

Los autores anteriormente citados consideran como especialmente indicado el uso de los tests en:

1. La admisión de los alumnos a los "colleges" o escuelas profesionales.

2. Entronque de las diversas enseñanzas.
3. Clasificación.

De estos tres apartados, el que principalmente puede retener nuestra atención es el tercero. En la enseñanza primaria no presenta problemas, ordinariamente, la admisión de candidatos, ni tampoco se presentan las ocasiones de entronque ("articulation") de las demás enseñanzas con la primaria, aunque sí el caso contrario. Sin embargo, no dejaremos de señalar la utilidad que tiene nuestra escala para la admisión de los sujetos a la enseñanza media. La conocida prueba de "ingreso" en el bachillerato pudiera verse favorecida con el empleo de nuestra escala; por ejemplo, el test de divisiones. No complicaría el procedimiento y nos ofrecería la ventaja de admitir o rechazar, no por una sola operación, sino por la prueba de una extensa gama de dificultades cuyo vencimiento supone el dominio completo de la técnica operatoria en la división.

Pero donde realmente resulta interesante es en la clasificación de los escolares. Para estas clasificaciones, dentro de la escuela primaria, es importante disponer de los instrumentos, que nos eviten la subjetividad y permitan al mismo tiempo la utilización de la medida en parangón con las medidas procedentes de los otros campos de la instrucción. Nuestra escala mide, por consiguiente, un tipo de conocimiento, el de cálculo que es fundamental para toda clasificación didáctica. No caeremos, sin embargo, en la hipérbole de considerar su importancia exclusiva. Un buen clasificador deberá utilizar otros más abundantes, que adquirirá mediante otros tests.

BIBLIOGRAFÍA

- BROWNELL, W. A.: *A critique of Committee of seven's Investigations on the Grade Placement of Arithmetic Process*. Elementary School Journal, 38 (1938), 495-508.
- BRUECKNER, L. J.; BOND, G. L.: *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*. Madrid, 1961.
- BUSWELL, G. T.: *Summary of Educational investigations, relating to Arithmetic*. Supplementary Educational Monograph, núm. 27. Department of Education University of Chicago Press, 1925.
- BUYSE, R.: *Etudes et recherches louvanistes sur le calcul élémentaire*. Actas del Congreso de Pedagogía de Santander. Madrid, 1950, IV.

- CALONGHI, L.: *La ricerca degli errori nelle 4 operazioni*. Orientamenti pedagogici, 4 (1957), 175-200.
- C. C. U. P. (Comission Consultive Universitaire de Pédagogie): *La division écrite des nombres entiers et ses difficultés*. Bruxelles, 1953.
- DELOBELLE, M. L.: *Les mensurations psychopédagogiques. I, Le calcul élémentaire*. Louvain, 1955.
- FERNÁNDEZ HUERTA, J.: *Bases de la enseñanza correctiva en Aritmética*. Bordón, 5 (1953), 257-270.
- *Formas de la división aritmética y graduación de las dificultades*. Bordón, 7 (1955), 149-162.
- *La aritmética como saber de varios momentos madurativos fácilmente discriminables*. Revista Española de Pedagogía, 15 (1957), 94-98.
- FISCHER, H.: *Analyse psychologique du calcul scolaire et du facteur G en cinquième année scolaire*. Neuchâtel, 1955.
- *Didactique de l'initiation mathématique à l'école primaire*. Ginebra, 1956.
- INHELDER, B.; PIAGET, J.: *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent: Essai sur la construction des structures opératoires formelles*. París, 1955.
- JUNQUERA, J.: *Didáctica del cálculo*. Barcelona, 1961.
- MEDINA, A.: *Medida objetiva del cálculo*. Revista Española de Pedagogía, 5 (1947), 401-412.
- NATALIS, E.: *De l'empirisme au raisonnement logique*, Liège, 1953.
- PIAGET, J.: *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid, 1963.
- PIAGET-SZEMINSKA: *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel, 1941.
- PIAGET-BOSCHER-CHATELET: *Initiation au calcul*. París, 1950.
- STUDIES IN ARITHMETIC: *Reports on investigations relating to present practice and teaching methods in the primary schools*. Londres, volumen I, 1939; vol. II, 1941.
- THORNDIKE, E. L.: *The Psychology of Arithmetic*. New York, 1922.
- URFA, M. E.: *Dificultades relativas a las cuatro operaciones fundamentales del cálculo*. Revista Española de Pedagogía, 15 (1957), 24-34.
- VILLAREJO, E.: *Iniciación al cálculo aritmético*. Bordón, 5 (1953), 235-246.
- WOODY, Clifford: *Measurements of some achievements in Arithmetic*. New York, Teachers College. Columbia University Contribution to Education, núm. 80, 1916.
- WOODY, C.: *Measurements of some achievements in Arithmetic*. School and Society, 4 (1916), 299-303.
- *The teaching of Arithmetic*. Tenth Yearbook of the National Council of teachers of Mathematics. Teachers College. Columbia University, 1935.
- *The Woody arithmetic scales. How to use them*. New York. Teachers College. Columbia University Boletín, núm. 19, 1920.